المحاضرة الثانية عملي تحليل

أوجد التكاملات الآتية :

(1) $\int \frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)^3}$

نلاحظ أن درجة البسط أصغر من المقام لذلك نلجأ إلى تفريق الكسر

$$\frac{x^3+2}{(x-1)(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} \quad *$$

نوحد المقامات ونحذفها

$$\Rightarrow x^3+2 = A(x-2)^3 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-2)(x-1) + D(x-1)$$

نعوض $x=1$ نعوض نجد أن $A=-3$

$x=2 \Leftarrow D=10$

نفك الأقواس والطاقات في الأعلى نجد أن أمثال x^3 في ،

$A+B=1 \Rightarrow -3+B=1 \Rightarrow B=4$

ولدينا أيضاً أمثال الثابت

$$2 = -8A - 4B + 2C - D$$

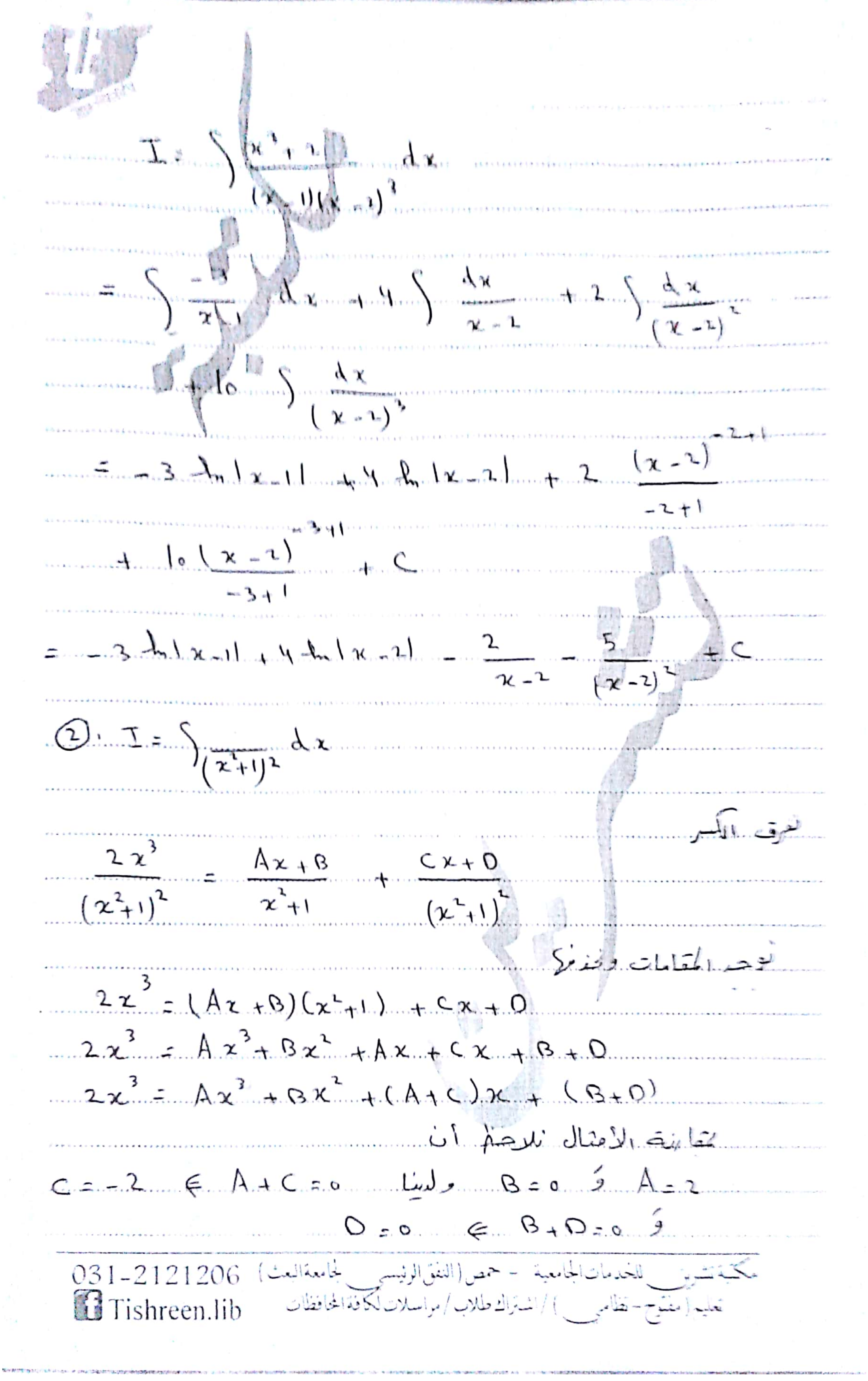
$$\Rightarrow 2 = -8(-3) - 4(4) + 2C - 10$$

$$\Rightarrow 2 = 24 - 16 - 10 + 2C$$

$$2 = 24 - 26 + 2C \Rightarrow 2 = -2 + 2C$$

$$\Rightarrow 4 = 2C \Rightarrow C = \frac{4}{2} = 2$$

نعوض A و B و C و D في *



$$I = \int \frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)^3}\, dx$$

$$= \int \frac{-3}{x-1}\, dx + 4\int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} + 10\int \frac{dx}{(x-2)^3}$$

$$= -3\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + 2\,\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + 10\,\frac{(x-2)^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= -3\ln|x-1| + 4\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} - \frac{5}{(x-2)^2} + C$$

② . $I = \int \frac{\quad}{(x^2+1)^2}\, dx$

نفرق الكسر

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

نوحد المقامات ونختزل

$$2x^3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$$

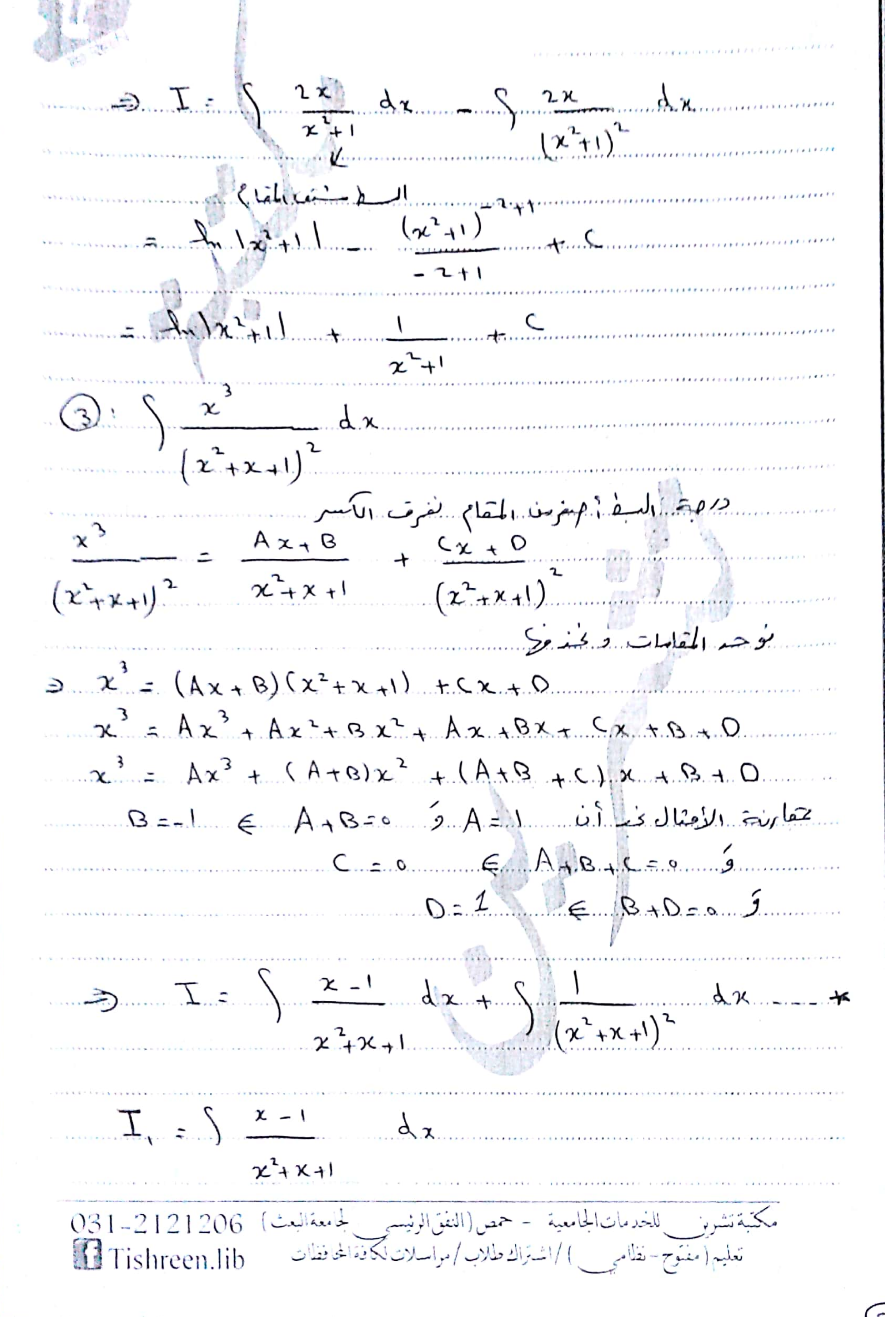
$$2x^3 = Ax^3 + Bx^2 + Ax + Cx + B + D$$

$$2x^3 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)$$

بمطابقة الأمثال نلاحظ أن

$A=2$ و $B=0$ ولدينا $A+C=0 \Leftarrow C=-2$

و $B+D=0 \Leftarrow D=0$



$$\Rightarrow I = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

(البسط مشتق المقام)

$$= \ln|x^2+1| - \frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= \ln|x^2+1| + \frac{1}{x^2+1} + C$$

③: $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

درجة البسط أصغر من المقام نفرق الكسر

$$\frac{x^3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$$

نوحد المقامات ونحذفها

$$\Rightarrow x^3 = (Ax+B)(x^2+x+1) + Cx + D$$

$$x^3 = Ax^3 + Ax^2 + Bx^2 + Ax + Bx + Cx + B + D$$

$$x^3 = Ax^3 + (A+B)x^2 + (A+B+C)x + B + D$$

بمقارنة الأمثال نجد أن $A = 1$ و $A+B=0 \Leftarrow B=-1$

و $A+B+C=0 \Leftarrow C=0$

و $B+D=0 \Leftarrow D=1$

$$\Rightarrow I = \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx \quad --- *$$

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$$

نجعل البسط مشتق المقام بالبداية نضرب ونقسم على 2

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)}{x^2+x+1}\,dx$$

نضيف ونطرح واحد

$$I_1 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2+1-1)}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

البسط مشتق المقام ← ؛ ← لا الاتمام إلى مربع كامل

نضيف ونطرح مربع نصف امثال x

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

لحساب $\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$ نجري تغير المتحول

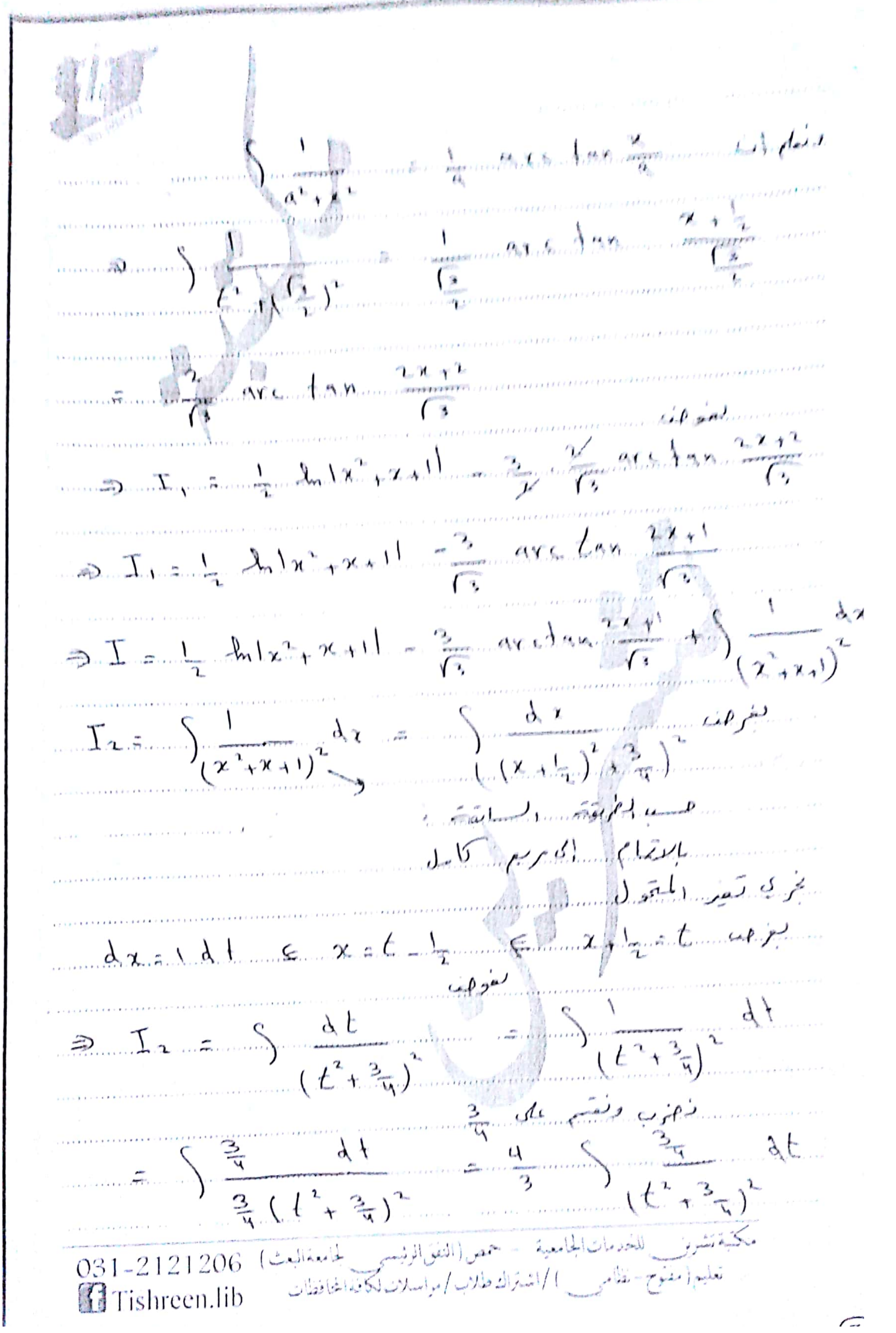
نفرض $t = x + \frac{1}{2} \Leftarrow x = t - \frac{1}{2}$

$\Leftarrow dx = 1\,dt$

نعوض

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dt$$



نعلم أنه $\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{t^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}\arctan\frac{x+\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2x+2}{\sqrt3}$

نعوض

$\Rightarrow I_1 = \frac12\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{2x+2}{\sqrt3}$

$\Rightarrow I_1 = \frac12\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{\sqrt3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt3}$

$\Rightarrow I = \frac12\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{\sqrt3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt3} + \int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$

$I_2 = \int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int\frac{dx}{\left((x+\frac12)^2+\frac34\right)^2}$ نعرف

حسب الطريقة السابقة

بالإتمام إلى مربع كامل

نجري تغيير المتحول

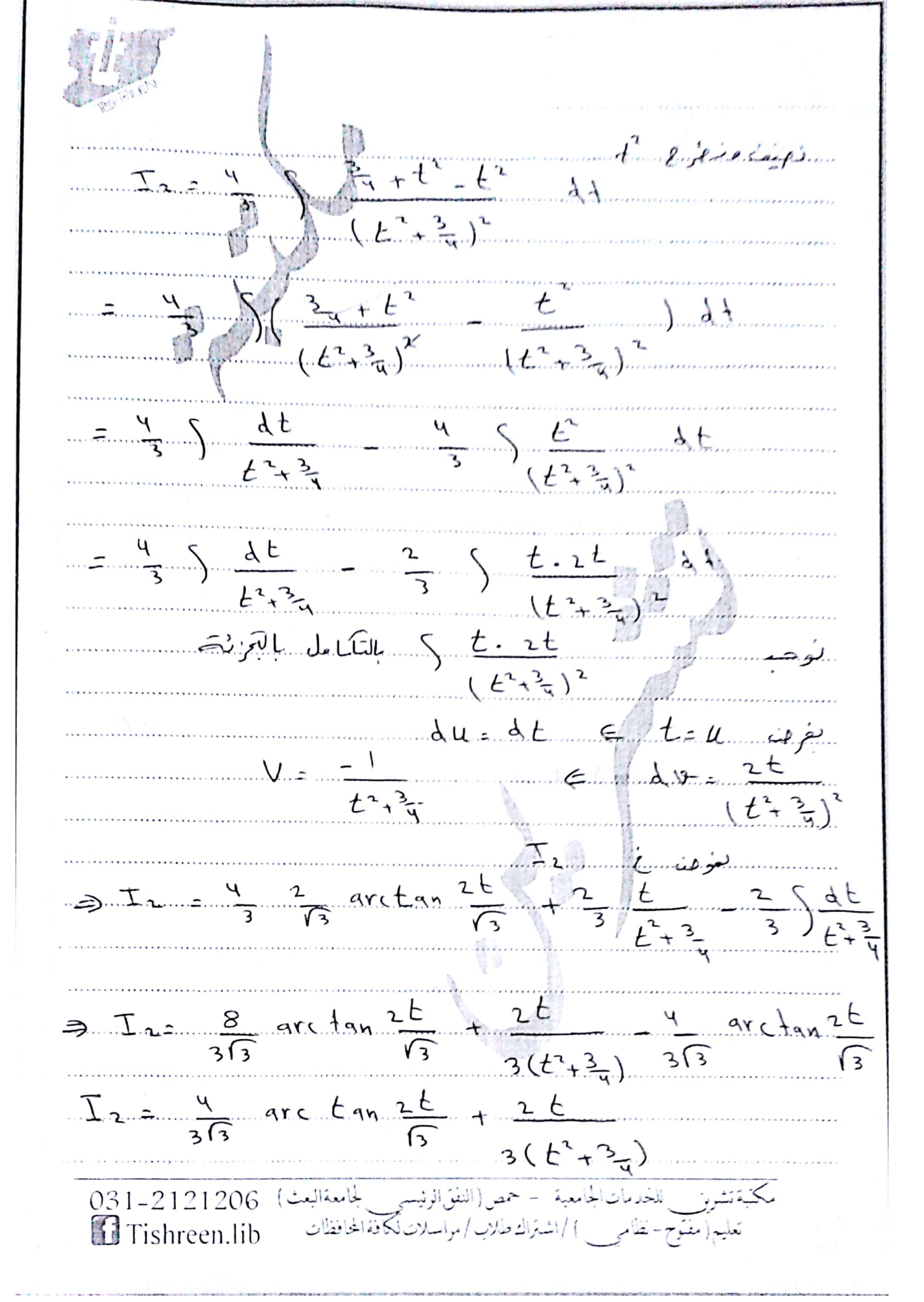
بفرض $x+\frac12 = t \Leftarrow x = t-\frac12 \Leftarrow dx = 1\,dt$

نعوض

$\Rightarrow I_2 = \int\frac{dt}{(t^2+\frac34)^2} = \int\frac{1}{(t^2+\frac34)^2}dt$

نضرب ونقسم على $\frac34$

$= \int\frac{\frac34\,dt}{\frac34(t^2+\frac34)^2} = \frac43\int\frac{\frac34}{(t^2+\frac34)^2}dt$



نضيف ونطرح t^2

$$I_2 = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{3}{4} + t^2 - t^2}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\, dt$$

$$= \frac{4}{3}\int \left(\frac{\frac{3}{4}+t^2}{(t^2+\frac{3}{4})^2} - \frac{t^2}{(t^2+\frac{3}{4})^2} \right) dt$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\int \frac{t^2}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\, dt$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\int \frac{t \cdot 2t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\, dt$$

نوجد $\int \frac{t \cdot 2t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}$ بالتكامل بالتجزئة

نفرض $t = u \Leftarrow du = dt$

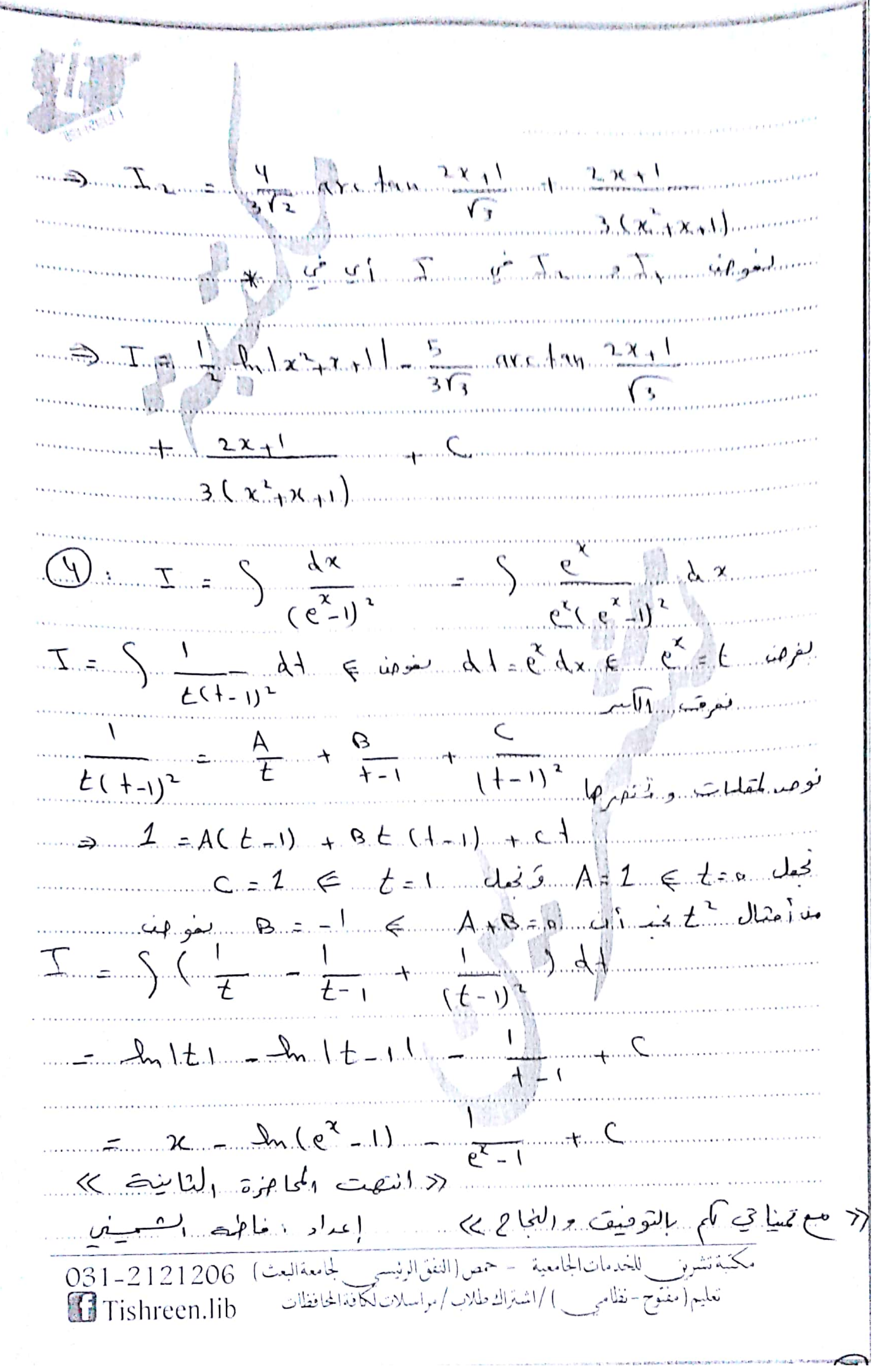
$dv = \frac{2t}{(t^2+\frac{3}{4})^2} \Leftarrow V = \frac{-1}{t^2+\frac{3}{4}}$

نعوض في I_2

$$\Rightarrow I_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{3(t^2+\frac{3}{4})} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}$$

$$I_2 = \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{3(t^2+\frac{3}{4})}$$



$$\Rightarrow I_2 = \frac{4}{3\sqrt{2}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

نعوض I_1 و I_2 في I ينتج *

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{5}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + C$$

④ : $I = \int \frac{dx}{(e^x-1)^2} = \int \frac{e^x}{e^x(e^x-1)^2} dx$

نفرض $e^x = t \Leftarrow dt = e^x dx \Leftarrow$ نعوض $I = \int \frac{1}{t(t-1)^2} dt$

نفرق الكسر

$$\frac{1}{t(t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}$$

نوحد المقامات و نختصرها

$$\Rightarrow 1 = A(t-1)^2 + Bt(t-1) + Ct$$

نجعل $t=0 \Leftarrow A=1$ ونجعل $t=1 \Leftarrow C=1$

من أمثال t^2 نجد أن $A+B=0 \Leftarrow B=-1$ نعوض

$$I = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right) dt$$

$$= \ln|t| - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + C$$

$$= x - \ln(e^x-1) - \frac{1}{e^x-1} + C$$

« انتهت المحاضرة الثانية »

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح »

إعداد : فاطمة الشميني